VITENSENTERET

26 Tårnet i Hanoi! (Rev 1.0, 27.08.99)

26.1 Beskrivelse

Bildet under viser hvordan modellen tar seg ut i utstillingen.

Figur 26.1 *Tårnet i Hanoi*

26.2 Oppgaver

Når du begynner, skal alle fire skivene ligge oppå hverandre på samme pinne, med den største underst og den minste øverst.

Du skal nå flytte hele tårnet over på en annen pinne, men bare en skive om gangen. Skivene skal tilslutt ligge som du begynte, med den største underst og den minste øverst.

Du har ikke lov til å legge skivene på bordet, men kan bruke en annen pinne til “mellomlanding”.

Hvor mange flytt trenger du for å få flyttet hele tårnet?

26.3 Eksperimentarius forteller litt mer

Det minste antall trekk for å flytte fire skiver er 15!

Denne oppgaven ble laget av matematikeren Edouard Lucas i 1883.

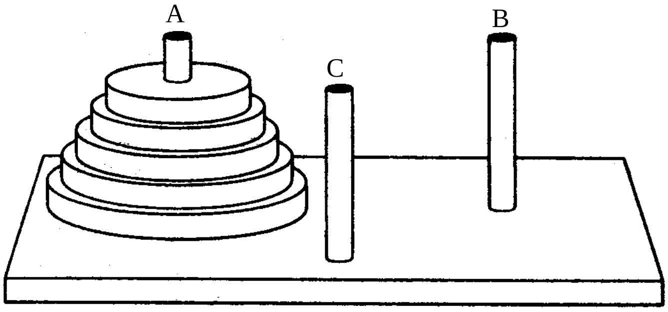
I følge en legende sitter Buddah i Hanoi og flytter en skive i sekundet i et tårn med 64 ringer i alt. Når hele tårnet er flyttet, vil han nå Nirvana. (Hvor lang tid vil det ta??)

Prøv å finne ut hvor mange flytt som er nødvendig dersom tårnet hadde 7 skiver.

I våre dager blir denne oppgaven ofte gitt til studenter når de skal lære seg å programmere datamaskiner.

26.4 Utdypende kommentarer

Edouard Lukas som i 1883 publiserte sitt lille puslespill har nok aldri funnet på denne historien. Det var året etter at denne historien dukket opp i forbindelse med dette puslespillet. Oppgaven gikk ut på å finne ut hvor mange flytt prestene måtte foreta.



Følgende historie fortelles fra Det fjerne østen[2]:

> *I det store tempelet i Benares, under kuppelen som markerer verdens sentrum, hviler en stor messingplate. Tre nåler av den fineste diamant er festet til platen, hver av dem en cubit høy, like tykk som kroppen til en bie. Ved verdens skapelse plasserte Gud sekstifire runde plater av det reneste gull. Den største platen nederst, deretter mindre og mindre plater på hverandre, med den minste liggende på toppen. Dette er Bramah's tårn. Siden den gang har prestene i tempelet, uavbrudt dag og natt, flyttet platene fra den ene nålen over til en av de andre i henhold til de evige og ubrytelige lover til Bramah. Disse lover forlanger at presten som er på vakt, ikke må flytte mer enn en plate av gangen. Han må dessuten flytte denne ene platen over til en av de andre nålene slik at en større plate aldri vil dekke en mindre. Den dagen alle de sekstifire platene er flyttet fra den nålen Bramah satte dem på ved verdens skapelse, og over til en av de de to andre, da vil tårnet, tempelet og Bramah smuldre hen til støv, og hele verden vil med et forferdelig drønn falle sammen og forsvinne til ingen ting.*

Nå er det ingen grunn til å starte med et tårn med 64 plater og det er selvfølgelig ingen forutsetning at platene er av gull. Figuren over viser et tårn med fem plater og spørsmålet er hvor mange flytt som minimum skal til for å flytte platene over fra A til f.eks. B. I tillegg har en lov å benytte C som en mellomstasjon. Hele tiden skal reglene som er gitt foran følges.

26.5 Oppgave med utdypende kommentarer

La elevene begynne med et tårn med en ring. Hvor mange flytt trenger en da for å flytte "tårnet"? Jo, svaret er selvfølgelig ganske enkelt og lik ett flytt.

Hva om tårnet har 2 ringer? De vil fort finne ut at de trenger minst 3 flytt. Med tre ringer trenger de 7 flytt og med 4, 15 flytt osv.

De ser da at de får en rekke med tall:

Antall ringer:	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Antall flytt:	*1*	*3*	*7*	*15*	*?*

Hvilket tall skal stå under 5 ringer?

La dem studere på dette problemet en stund. Det er flere måter å finne det riktige svaret på. Her er et par løsninger.

> *Det første tallet er 1. Det neste tallet er 3, dvs. $2 \cdot 1+1=3$. Det neste igjen er 7, dvs. $2 \cdot 3+1=7$. Det neste er 15, dvs $2 \cdot 7+1=15$. Vi ser at vi har funnet en regel. Ulempen med denne løsningen er at den er ganske arbeidskrevende. Det blir derfor litt av en jobb å finne ut hvor mange flytt prestene måtte foreta.*

En annen løsning kan være

> *Det første tallet er 1 dvs. $2^1 - 1=1$. Det neste tallet er 3, dvs. $2^2 - 1 = 1$. Det neste tallet for tre ringer er 7, dvs $2^3 - 1 = 7$. Det fjerde tallet med fire ringer er $2^4 - 1 = 15$. Det kan da vises at $2^n - 1$ = antall flytt som kreves for å flytte n ringer. Denne formelen kan brukes for å bestemme prestenes arbeid.*[1]

Prestene må da flytte $2^{64} - 1$ = 18,446,744,073,709,551,615 som er et tall av respektabel størrelse. Dersom våre prester klarte å flytte en ring i sekundet ville de likevel holde på i nesten **600 milliarder** år som er ca 40 ganger så lenge som en antar at universet har eksistert. Så det er av denne grunn ingen grunn til panikk.

26.6 Litteratur

For ytterligere utdypning se følgende referanser.

[1] Martin Gardner, "Mathematical Puzzles and Diversions", Pelican Book 1973

[2] David Wells, "The Penguin Book of Curious and Interesting Puzzles", Penguin 1992, ISBN 0-14-014875-2

1.